Arenas Amorós, Jorge

por FRANCISCO ALVAREZ GONZALEZ

UNIVERSIDAD
COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

GRADO EN ECONOMÍA

TRABAJO DE FIN DE GRADO

TÍTULO: Búsqueda de empleo de un trabajador representativo con costes de búsqueda y empresas heterogéneas.

AUTOR: Jorge Arenas Amorós

TUTOR: Francisco Álvarez González

CURSO ACADÉMICO: 2020-2021
CONVOCATORIA: JUNIO

Índice

1. Introducción

Este TFG trata de resolver el problema al que se enfrenta un individuo que está buscando empleo y tiene que asumir costes de búsqueda para recibir cada una de las ofertas de empleo.

En este trabajo se consideran aspectos estratégicos tanto por el lado de la oferta (individuo que busca empleo) como por el lado de la demanda (empresas). Supondremos que todos los trabajadores son idénticos, por lo que es suficiente considerar un consumidor representativo, al que llamaremos en adelante potencial trabajador.

Describamos el juego. Los jugadores serán las empresas y el potencial empleado. El espacio de estrategias de las empresas es el salario que ofrecen, w, como función de la productividad, θ_i, que tendría el trabajador si fuese contratado. Además, la productividad, que es una información privada de la empresa, es una realización de una variable aleatoria que sirve para determinar el salario, introduciendo heterogeneidad entre empresas. El espacio de estrategias del trabajador es el número de empresas que visita, n, un entero positivo, como función de su coste de búsqueda. Cada empresa maximiza su beneficio esperado ex-ante, mientras que el trabajador maximiza su utilidad esperada.

De esta forma, el comportamiento de este individuo unido al comportamiento de las empresas, hace que este problema sea en realidad un juego.

En relación al número de empresas que el trabajador visita, la literatura de los costes de búsqueda clasifica principalmente dos tipos de estrategias de búsqueda: la *fixed sample size* o búsqueda de muestra fija y la *sequential sample* o búsqueda secuencial. La *fixed sample size* consiste en visitar un número n de empresas determinado con anterioridad a la búsqueda y posteriormente elegir aquella con mayor salario. Por el contrario, la *sequential sample* se basa en visitar una a una cada una de las empresas y decidir si, dado el salario de la actual empresa, conviene buscar una empresa más o si por el contrario es más conveniente parar de buscar.

La *sequential sample* parece más natural en el caso de que la búsqueda de trabajo sea presencial, sin embargo, la *fixed sample* aparentemente es más común en portales de búsqueda de empleo, en los que se muestran n resultados.

En el modelo de este trabajo se ha considerado más conveniente utilizar la estrategia de búsqueda fija por diversos motivos. Uno de ellos es que la *fixed sample size* es compatible con el *perfect recall*, mientras que la búsqueda secuencial no. Esto quiere decir, que el trabajador no rechaza ninguna oferta de trabajo de las empresas visitadas hasta el final del juego y que por lo tanto puede valorar simultáneamente todas las ofertas, lo cual parece más realista en determinadas situaciones. El segundo de los motivos es que bajo *fixed sample size* existe un equilibrio en estrategias puras, mientras que la existencia de equilibrio con *sequential sample* requiere estrategias mixtas en la búsqueda *(Stahl, 1989)*.

Aunque la búsqueda secuencial es la predilecta en la literatura de los costes de búsqueda, en realidad no hay evidencia suficiente para considerar cual estrategia de búsqueda es mejor. En los últimos años han habido numerosos estudios al respecto, por ejemplo *Honka y Chintagunta (2013)* analizaron empíricamente cual de las dos era la utilizada por los consumidores de seguros de coche. Concluyendo con que la búsqueda fija es válida y utilizada por determinados tipos de consumidores.

2. Problema general

A lo largo de este trabajo recorreremos distintos modelos dentro del marco anterior dependiendo de la estructura de mercado y del comportamiento estratégico de los consumidores y empresas. En el apartado 3 hallaremos el equilibrio para unas empresas que demandan trabajo a su salario competitivo. En el apartado 4 lo hallaremos para empresas que entienden el juego como una subasta de primer precio en la que tendrán incentivos a tener un *mark-up* de salarios para ser elegidas por el trabajador. Por último, el apartado 5 será una ampliación del apartado 4, en el que el trabajador tiene un salario de reserva y las empresas se siguen comportando como en una subasta de primer precio.

2.1 Problema del trabajador

Como acabamos de decir, la única variable de decisión del trabajador será la n. Además de realizar *fixed sample size*, suponemos que existe lo que se denomina como *perfect recall*: el trabajador una vez analizadas las *n* empresas, elige simultáneamente entre todas ellas a aquella con mayor salario. Denotamos $w(n)_F$:={ w_1,..., w_n} al conjunto de *n* salarios observador por el trabajador. Cada observación tiene para el trabajador un coste. La notación indica que los salarios son una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad aún desconocemos.

Dado que existe *perfect recall*, en ausencia de costes de búsqueda, a mayor *n*, más posibilidades hay de que encuentre un salario superior.

La utilidad esperada del trabajador por visitar *n* empresas es igual al salario máximo que espera conseguir analizando *n* empresas menos el coste de buscar en esas *n* empresas.

$$U \coloneqq G(n)_F - \tau \cdot n \qquad (2.1)$$

Siendo $G(n)_F = E[\max\ w(n)_F]$ el máximo salario esperado de $w(n)_F$ y $\tau \cdot n$ el coste de buscar *n* empresas. Salvando las distancias de utilizar salarios máximos en lugar de precios mínimos, es la misma función de utilidad esperada que la de *Álvarez y Rey (2019)*.

Para cualquier $\tau > 0$, existe un trade-off entre buscar más para tener un salario esperado mayor y perder utilidad asumiendo el coste de búsqueda.

Por lo tanto, la mejor respuesta del potencial empleado dada la distribución de salarios y el coste unitario τ, será n^*. Vendrá dada por la expresión *(2.2)*.

$$n^* := arg\ Max_{n \in \mathbb{Z}^+} \{ G(n)_F - \tau \cdot n \} \qquad (2.2)$$

Es decir, n^* es aquel tamaño muestral que maximiza la utilidad esperada del potencial empleado.

2.2 Problema de las empresas

Las empresas demandan empleo en el mercado laboral ofreciendo salarios independientes e idénticamente distribuidos. Estos salarios dependerán del nivel de productividad que tenga la empresa, al que llamaremos θ_i.

Suponemos que el número de empresas demandantes que hay en el mercado es lo suficientemente grande como para que el n^* del trabajador nunca lo supere. Por lo que n^* no estará acotado.

Supongamos que la función de producción de la empresa i-ésima es neoclásica:

$$Y_i := F(L)_i = \theta_i \cdot L^\alpha \qquad \text{con } 0 < \alpha < 1 \text{ y } \theta_i \sim U[0, a]$$

El pago de las empresas estará dado por el beneficio que estas tengan. Dicha función de beneficios para la empresa i-ésima será:

$$\pi_F(\theta_i, L)_i := p \cdot \theta_i \cdot L^\alpha - w \cdot L$$

Dado que en esta economía solo hay un potencial trabajador, lo único que las empresas pueden hacer es contratarlo o no contratarlo, $L=\{0, 1\}$. Notar que para un θ_i fijo, $\pi_F(0) = 0$ mientras que $\pi_F(1) \geq 0$. Por este motivo, "contratar" domina débilmente a "no contratar" y L será igual a 1.

Como L está fijado y θ_i es una variable aleatoria, la única variable de decisión que les queda a las empresas es w_i, tal que la i-ésima empresa elegirá aquel salario que maximiza su beneficio. Vendrá dado por la ecuación *(2.3)*.

$$w^*_i := arg\ Max_{L=1}\, p \cdot \theta_i \cdot L^\alpha - w_i \cdot L \qquad (2.3)$$

Su correspondiente Condición de Primer Orden será:

$$\frac{d\pi_F}{dL} = p \cdot \theta_i \cdot \alpha \cdot L^{\alpha-1} - w_i = 0$$

Si se restringe $L = 1$, queda que el salario competitivo al que demandan trabajo las empresas vendrá dado por la expresión *(2.4)*.

$$w_i = p \cdot \theta_i \cdot \alpha \qquad (2.4)$$

Esta expresión es la que conocemos como salario competitivo en el sentido *walrasiano*, puesto que el salario de cada empresa es una función de su propia tecnología. Se da que el salario se iguala a la productividad marginal del factor trabajo. Este es el salario que utilizarán las empresas en el apartado 3.

El parámetro p hace referencia al precio al que se vende el producto de la empresa, aunque en realidad es una variable exógena, en este modelo lo trataremos como un parámetro por simplicidad en los cálculo con esperanzas. Por otra parte, el parámetro α hace referencia a la elasticidad output-salario, que además es constante e igual a: $\varepsilon =: \alpha/(1-\alpha)$.

3. Modelo con salarios competitivos

Hemos visto que para poder definir $U \coloneqq G(n)_F - \tau \cdot n$ teníamos que definir antes el salario máximo esperado del trabajador, $G(n)_F = E[max\, w(n)_F]$.

También hemos visto que la demanda de empleo competitiva viene dada por la ecuación de salarios $w_i(\theta_i) = p \cdot \theta_i \cdot \alpha$. Siendo θ_i una variable aleatoria que funciona como un escalar de productividad y que viene definido por una distribución uniforme, $\theta_i \sim U[0, a]$.

De acuerdo a esta demanda competitiva, $w_i(\theta_i)$ depende positiva y linealmente de θ_i, por lo que:

$$\mathrm{w}(\theta^{MAX}) = w^{MAX} = \mathrm{p} \cdot \theta^{MAX} \cdot \alpha \qquad (3.1)$$

Siendo:

$$\theta^{MAX} := max\,\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$$

$$w^{MAX} := max\,\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

Esto significa que la empresa que tenga el θ^{MAX} ofrecerá el w^{MAX} del conjunto de los *n* salarios $w(n) = \{w_1, w_2, \ldots, w_\mathrm{n}\}$ y será esta la que termine contratando al trabajador.

Por ello, necesitamos conocer la distribución de θ^{MAX}. Utilizaremos la distribución del estadístico de mayor orden, suponiendo que las todas las θ_i son independientes e idénticamente distribuidas. La Función de Distribución Acumulada (FDA) de θ^{MAX} vendrá dada por la siguiente expresión.

$$F_{\theta^{MAX}} = Prob(\theta^{MAX} \leq x) = Prob(\theta_1 \leq x, \theta_2 \leq x, \ldots, \theta_n \leq x) =$$

$$= Prob(\theta_1 \leq x) \cdot Prob(\theta_2 \leq x) \cdot \ldots \cdot Prob(\theta_n \leq x) =$$

$$= Prob(\theta \leq x)^n$$

Quedando la FDA y FD (Función de Densidad) de θ^{MAX} son respectivamente las expresiones *(3.2)* y *(3.3)*.

$$F_{\theta^{MAX}}(x) := [F_\theta(x)]^n \qquad (3.2)$$

$$f_{\theta^{MAX}}(x) := n \cdot [F_\theta(x)]^{n-1} \cdot f_\theta(x) \qquad (3.3)$$

Si $\theta \sim U[0, a]$, entonces la FDA y FD de θ son respectivamente las siguientes expresiones.

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{a} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } a \leq x \end{cases} \qquad f_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{a} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } a \leq x \end{cases}$$

A partir de ellas, sustituyéndolas en (3.2) y (3.3), podemos obtener las FDA y FD de θ^{MAX}. Quedando las siguientes expresiones.

$$F_{\theta^{MAX}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ [\frac{x}{a}]^n & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } a \leq x \end{cases} \qquad f_{\theta^{MAX}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ n \cdot \frac{x^{n-1}}{a^n} & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } a \leq x \end{cases}$$

De esta forma, conociendo $f_{\theta^{MAX}}(x)$, podemos calcular la E [θ^{MAX}].

$$E\,[\,\theta^{MAX}\,] := \int_0^a f_{\theta^{MAX}}(x) \cdot x\, dx = \frac{n}{n+1} \cdot a \qquad (3.4)$$

Tomando esperanzas en la expresión *(3.1)*, tenemos:

$$E\,[\,w^{MAX}] = p \cdot \alpha \cdot E[\theta^{MAX}]$$

Sustituyendo la ecuación *(3.4)* en este resultado, obtenemos $G(n)_F$. De esta forma, la expresión *(3.5)* representará el máximo salario esperado por parte del trabajador.

$$G(n)_F := p \cdot \alpha \cdot a \cdot \frac{n}{n+1} \qquad (3.5)$$

Así, incluyendo *(3.5)* en la función de utilidad del trabajador, *(2.1)*, la utilidad del trabajador en este apartado queda:

$$U := p \cdot \alpha \cdot a \cdot \frac{n}{n+1} - \tau \cdot n$$

Siendo la mejor respuesta de los hogares:

$$n^* := arg\ Max_{n \in \mathbb{Z}^+} U = p \cdot \alpha \cdot a \cdot \frac{n}{n+1} - \tau \cdot n$$

Quedando una solución convexa para máximo dada por la expresión *(3.6)*.

$$n^* = \sqrt{\frac{p \cdot \alpha \cdot a}{\tau}} - 1 \qquad (3.6)$$

Notar que $\frac{dn*}{d\tau} < 0$, lo cual es consistente con la intuición de que a mayores costes de búsqueda, será óptimo buscar en un número menor de empresas. Además, como adelantamos antes, en ausencia de costes de búsqueda lo óptimo es buscar en todas las empresas que puedas, pues si $\tau \to 0$ entonces $n^* \to \infty$.

De esta forma, el juego ocurre en el siguiente orden:

El trabajador elige su $n*$ conociendo $\{\tau, a, p, \alpha\}$ → Cada empresa demanda empleo de acuerdo a: $w_i = p \cdot \theta_i \cdot \alpha$ Conociendo $\{p, \alpha, \theta_i\}$ (sin tener en cuenta $n*$) → El trabajador elige aquella empresa de las $n*$ visitadas con w^{MAX}

El equilibrio de este juego vendrá dado por el perfil:

$$\begin{cases} n^* = \sqrt{\frac{p \cdot \alpha \cdot \mathrm{a}}{\tau}} - 1 \\ w_i{}^* = \mathrm{p} \cdot \theta_{\mathrm{i}} \cdot \alpha \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n^* \end{cases}$$

Podemos apreciar en este equilibrio competitivo que las empresas toman sus decisiones en función de su propia tecnología, con independencia del número de empresas que visita el potencial trabajador. De esta forma, se dice que las empresas son competitivas en un sentido *walrasiano*, puesto que no hacen conjeturas respecto al comportamiento del resto de empresas competidoras.

Mientras que el trabajador decide su n^* mediante una búsqueda de muestra fija con independencia de los salarios de las n^* empresas que visita. Sin embargo sí que incorpora en su análisis la distribución de los salarios.

4. Modelo con salarios no competitivos

En el modelo descrito hasta ahora, las empresas no se comportaban de forma estratégica, ya que sus decisiones no tenían en cuenta ni las decisiones que tomaba el trabajador ni las que tomaban el resto de las empresas, algo poco realista.

En este apartado vamos a incorporar el comportamiento estratégico de las empresas como una subasta simétrica de precios privados y de sobre cerrado en la que la puja es el salario de las empresas y el objeto subastado es el trabajador representativo que hay en el modelo. Puede que sea necesario definir los siguientes conceptos.

- Una subasta simétrica es aquella en la que todos los pujadores son *ex-ante* iguales, solo se diferencian en su disponibilidad al pago por el objeto subastado, la cual es una variable aleatoria.

- Si la subasta es en sobre cerrado, significa que las empresas pujan sin saber lo que están haciendo el resto de empresas. Por ejemplo, en la subasta de precios ascendentes o subasta a la inglesa, a medida que va ascendiendo la puja máxima, los pujadores obtienen información de cuantos pujadores van retirándose de la subasta y de esta forma estiman cual es el verdadero valor del objeto.

- Las subastas en sobre cerrado también implican que solo se puede pujar una vez y que todos los pujadores deben hacerlo simultáneamente.

Si las empresas ofrecen salario estratégicamente, en contraposición a los salarios competitivos, observando de forma privada su productividad, conforman un juego bayesiano de información incompleta.

El problema que resolverán las empresas se asemejará a una subasta de primer precio en la que cada empresa hace una puja de sobre cerrado y, en caso de ganar la subasta, pagará el importe de lo que ha pujado.

Vamos a hacer una serie de supuestos y definiciones:

- Hay N empresas en la subasta. Este número de empresas pujadoras coincide con el número de empresas que el trabajador decidirá visitar, n^*. El motivo por el que utilizamos N es porque aún no hemos incorporado la decisión del trabajador.

- La empresa i-ésima asignará un valor x_i a contratar al trabajador. En teoría de subastas es la máxima disponibilidad a pagar o máximo salario que pueden permitirse pagar. En este caso x_i será el salario de beneficio nulo, si la empresa puja un salario superior a este, entrará en pérdidas.

  De esta forma, evaluando la ecuación de beneficios en x_i:

$$\left.\begin{aligned} \pi_F(w,L)_i &:= p \cdot \theta_i \cdot L^\alpha - w \cdot L \\ L &= 1 \\ \pi_F(x_i,L)_i &= 0 \end{aligned}\right\} \pi_F(x_i,1) = p \cdot \theta_i - x_i = 0$$

  Se obtiene que el salario de beneficio nulo será la expresión *(4.1)*.

$$x_i = p \cdot \theta_i \tag{4.1}$$

  Notar que como $\alpha \in (0,1)$, el salario competitivo, w_i^*, será menor que el salario de beneficio nulo, x_i.

$$\left.\begin{aligned} w_i^* &= p \cdot \theta_i \cdot \alpha \\ \alpha &\in (0,1) \\ x_i &= p \cdot \theta_i \end{aligned}\right\} w_i^* < x_i$$

- Sea la función de la i-ésima empresa $\beta_i : [0, a] \to \mathbb{R}^+$. Con ella, dado un x_i entre $[0, a]$ se define la puja de la empresa. Dicha puja será además la de equilibrio.

- Cada x_i para $i = \{1, \dots, N\}$ son independientes y están idénticamente distribuidas en intervalo $[0, a]$ con su correspondiente función de distribución acumulada (FDA), $F_{x_i}(z)$.

- La i-ésima empresa pujará un salario que denotaremos por $\beta_i = \beta(x_i)$

Los pagos que obtendrá la i-ésima empresa pujadora serán:

$$\pi_{\mathrm{i}} = \begin{cases} \pi(\beta_i) - \pi(x_i) = x_i - \beta_i & \text{si } \beta_i > max_{j\neq i}\, \beta_j \\ 0 & \text{si } \beta_i < max_{j\neq i}\, \beta_j \end{cases}$$

En esta subasta se puede comprobar que la puja de equilibrio vendrá dada por la expresión *(4.2)*. En el Anexo 1 se demuestra que esta expresión constituye el único equilibrio simétrico del juego entre empresas, donde las empresas toman como dado el número de visitas que hace el trabajador.

$$\beta(x_i) = x_i - \int_0^{x_i} \frac{G(y)}{G(x)} dy \qquad (4.2)$$

Siendo *G(x)* la función de distribución acumulada del salario de beneficio nulo más alto de las *N-1* empresas distintas de la i-ésima.

Para $x_i \sim U[0,a]$ se tiene que $F(x) = \frac{x}{a}$ y $G(x) = (\frac{x}{a})^{N-1}$.

Por lo que si $x_i \sim U[0,a]$, la puja de equilibrio será:

$$\beta(x_i) = x_i - (\frac{a}{x})^{N-1} \cdot \int_0^{x_i} (\frac{y}{a})^{N-1}\, dy$$

Quedando que la puja de equilibrio es la expresión *(4.3)*.

$$\beta(x_i) = \frac{N-1}{N} \cdot x_i \qquad (4.3)$$

La puja de equilibrio nunca alcanzará el valor de la máxima disponibilidad al pago, x_i, puesto que eso asegura un beneficio nulo con independencia del resultado de la subasta. También notar que si el número de empresas pujadoras tiende a infinito, la puja de equilibrio tiende a x_i.

Recordemos que la máxima disponibilidad a pagar o salario de beneficio nulo venía dado por la expresión *(4.1)*, $x_i = p \cdot \theta_i$. En donde p es el precio del bien producido por la empresa, el cual hemos supuesto que está dado exógenamente para este modelo. Notar que si $p = 1$, $x_i = \theta_{\mathrm{i}}$. De esta forma, es la aleatoriedad de $\theta_{\mathrm{i}} \sim U[0,a]$ la que causa que $x_i \sim U[0,a]$ y la subasta transcurra como la hemos descrito. También, la puja de equilibrio se podrá expresar en función de θ_{i}, tal y como en la expresión *(4.4)*.

$$\beta(\theta_i) = \frac{N-1}{N} \cdot \theta_i \qquad (4.4)$$

Como vimos en *(3.4)* la esperanza del θ máximo de una muestra de N elementos era:

$$E\,[\,\theta^{MAX}\,] := \frac{N}{N+1} \cdot a \qquad (3.4)$$

Notar que en la expresión *(4.3)* relación entre la puja de equilibrio y θ_{i} es lineal y a la vez una relación positiva. Por lo que el θ^{MAX} implica $\beta(\theta^{MAX})$.

$$\beta(\theta^{MAX}) = \frac{N-1}{N} \cdot \theta^{MAX}$$

Si tomamos esperanzas en ambos términos.

$$E[\beta(\theta^{MAX})] = \frac{N-1}{N} \cdot E[\theta^{MAX}]$$

Sustituyendo *(3.4)* en esta expresión nos permite determinar el salario máximo que espera recibir el trabajador visitando *N* empresas, que, recordemos que era el término $G(n)_F$ de la utilidad del trabajador.

$$E[\beta(\theta^{MAX})] = \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N}{N+1} \cdot a$$

Quedando la expresión *(4.5)*. Este es el máximo salario esperado por parte del trabajador cuando las productividades se distribuyen uniformemente, $\theta_i \sim U[0, a]$.

$$G(n)_F = \frac{N-1}{N+1} \cdot a = \frac{n-1}{n+1} \cdot a \qquad (4.5)$$

Utilizando la ecuación *(4.5)* en la función de utilidad del trabajador, queda la siguiente expresión.

$$U := \frac{n-1}{n+1} \cdot a - \tau \cdot n$$

La mejor respuesta del trabajador, sigue siendo:

$$n^* := \arg\ Max_{n \in \mathbb{Z}^+}\ U$$

Otorgando una solución de máximo, descrita por la expresión *(4.6)*.

$$n^* = \sqrt{\frac{2 \cdot a}{\tau}} - 1 \qquad (4.6)$$

Notar al comparar *(4.6)* con *(3.6)* que si las empresas se comportan de forma estratégica, el trabajador buscará en un número mayor de ellas.

$$n^* = \sqrt{\frac{\alpha \cdot a}{\tau}} - 1 \qquad \text{con} \qquad p = 1\ ;\ 0 < \alpha < 1 \qquad (3.6)$$

Dado que $n^*_{CP} < n^*_{EST}$ y que los costes búsqueda son los mismos, podemos intuir que el salario máximo esperado por el trabajador es mayor en el caso estratégico que en el competitivo. Siempre y cuando se cumpla que $\frac{n*-1}{n*} > \alpha$. Más adelante veremos que esta es la misma condición que asegura la existencia de un *mark-up* positivo de salarios.

El perfil de estrategias compuesto por el sistema de la mejor respuesta del potencial trabajador y las mejores respuesta de las empresas constituyen un *equilibrio de Nash*.

$$\begin{cases} n^* = \sqrt{\frac{2 \cdot a}{\tau}} - 1 & (4.6) \\ \beta_i = \frac{n*-1}{n*} \cdot \theta_i & (4.3) \end{cases}$$

El esquema del juego con una búsqueda tipo *fixed sample size* y con comportamiento estratégico de las empresas será:

El trabajador elige su n^* conociendo $\{\tau, a\}$ → Cada empresa demanda empleo de acuerdo a: $\beta_i = \frac{n*-1}{n*} \cdot \theta_i$ Conociendo $\{n^*, \theta_i\}$ → El trabajador elige aquella empresa de las n^* visitadas con β^{MAX}

Notar que, a diferencia del *equilibrio walrasiano* del apartado 3, en este el salario de las empresas es una función del número de empresas pujadoras seleccionadas por el trabajador. Esto refleja el comportamiento estratégico que hay en el modelo, puesto cada una de las empresas está incorporando las decisiones del consumidor y del resto de las empresas para determinar su salario.

Podemos analizar el *mark-up* de salarios al incorporar el comportamiento estratégico de las empresas. Sean, para p = 1:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \theta_i \\ w_i^* &= \theta_i \cdot \alpha \end{aligned}\right\} \quad x_i = \frac{1}{\alpha} \cdot w_i^*$$

Por lo que, podemos comparar el salario estratégico con el salario competitivo:

$$\beta_i = \frac{n*-1}{n*} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot w_i^* > w_i^*$$

Por lo tanto, $\beta_i > w_i^*$ o lo que es lo mismo, el *mark-up* de salarios es positivo siempre y cuando $\frac{n*-1}{n*} > \alpha$. Lo cual es más fácil que ocurra para n^* lo suficientemente grandes.

5. Modelo con salarios no competitivos y con salario de reserva del trabajador

Hasta ahora hemos encontrado el equilibrio de dos juegos en los que los trabajadores hacían una búsqueda usando *fixed sample size*, elegían el número n^* de empresas que visitarían para maximizar su utilidad esperada. Por otra parte, las empresas llevaban a cabo una demanda competitiva de trabajo (apartado 3) o un comportamiento estratégico en el que eran pujadoras de una subasta privada de primer precio (apartado 4).

En este apartado 5 se va a introducir el concepto de salario de reserva por parte del trabajador, b, exógenamente dado antes de empezar a buscar. Introducir un salario de reserva hace que ningún salario inferior a b sea considerado por el trabajador. Vamos a suponer que el origen de dicho salario de reserva es una prestación por desempleo.

Puede demostrarse que, bajo la existencia de un salario de reserva, la puja de equilibrio de las empresas vendrá dada por la expresión *(5.1)*:

$$\beta(x_i) \ = \ b \cdot \frac{G(b)}{G(x_i)} + \frac{1}{G(x_i)} \int_b^{x_i} y \cdot g(y)\, dy \qquad (5.1)$$

Siendo *G(*x_i*)* la función de distribución acumulada del salario de beneficio nulo más alto de las *N-1* empresas distintas de la i-ésima y siendo *g(*x_i*)* su correspondiente función de densidad.

La ecuación *(5.2)*, define la puja de equilibrio de las empresas bajo $x_i \sim U[0, a]$.

$$\beta(x_i) \ = \ \frac{N-1}{N} \cdot x_i \ + \ \frac{b^N}{{x_i}^{N-1}} \cdot \frac{1}{N} \qquad (5.2)$$

Notar que si *b = 0*, entonces la puja de equilibrio es la misma que la del apartado 3.

$$\beta(x_i) \ = \ \frac{N-1}{N} \cdot x_i$$

También notar en *(5.2)* que $\beta(b) = b$. Esto ocurre porque si una empresa tiene un x_i igual al salario de reserva del trabajador, entonces solo ganará si el resto de las empresas pujan por debajo de *b*.

Como vimos en el apartado 3, si el precio del bien de la empresa era unitario (*p=1*), se daba que la máxima disponibilidad a pagar, x_i, era igual a θ_i. En la ecuación *(5.3)* se expresa la puja simétrica de equilibrio como función de θ_i, suponiendo *p=1*.

$$\beta(\theta_\mathrm{i}) \ = \ \frac{N-1}{N} \cdot \theta_\mathrm{i} \ + \ \frac{b^N}{{\theta_\mathrm{i}}^{N-1}} \cdot \frac{1}{N} \qquad (5.3)$$

A diferencia del apartado anterior, ahora $\beta(\theta_\mathrm{i})$ no es lineal con θ_i, sino que de hecho es una función convexa que toma un valor mínimo en $\beta(b) = b$, siempre que $N > 1$. Como las pujas inferiores a b no serán consideradas por el trabajador, en esta subasta seguirá ganando aquella empresa con el mayor θ_i.

$$\beta(\theta^{MAX}) = \ \frac{N-1}{N} \cdot \theta^{MAX} \ + \ \frac{b^N}{(\theta^{MAX})^{N-1}} \cdot \frac{1}{N}$$

Tomando esperanzas en esta expresión:

$$\mathrm{E}[\ \beta(\theta^{MAX})\ ] = \frac{N-1}{N} \cdot E[\ \theta^{MAX}] \ + \ \frac{b^N}{N} \cdot E[\ (\theta^{MAX})^{1-N}]$$

Sabiendo que $E[\ \theta^{MAX}] \ = \ \frac{N}{N+1} \cdot a$, podemos simplificar el primer término de la suma. Sin embargo, no podemos hacerlo en el segundo término ya que se trata de la esperanza de una expresión no lineal.

$$\mathrm{E}[\ \beta(\theta^{MAX})\ ] = \frac{N-1}{N+1} \cdot a \ + \ \frac{b^N}{N} \cdot E[\ (\theta^{MAX})^{1-N}] \qquad (5.4)$$

Por otra parte, ahora la esperanza del máximo salario, $G(n)_F$, debe ser la esperanza del máximo elemento del conjunto de los *n** salarios y del salario del reserva:

$$w^{MAX} := \max\ \{b,\ \beta(\theta_1), \dots, \beta(\theta_\mathrm{n})\ \}$$

Por lo que:

$$E[max\{ b, \beta(\theta_1), \dots, \beta(\theta_\mathrm{n}) \}] = E[max\{b, \ \beta(\theta^{MAX})]$$

$$= b \cdot Prob(\theta \leq \ b)^N + \int_b^{\mathrm{a}} f_{\beta(\theta^{MAX})}(z) \cdot z \, dz$$

$$= b \cdot (\tfrac{b}{\mathrm{a}})^N + E[\beta(\theta^{MAX})]$$

Quedando el salario máximo esperado del potencial trabajador:

$$G(n)_F = E[max\{b, \ \beta(\theta^{MAX})\}] = \frac{b^{N+1}}{a^N} + \frac{N-1}{N+1} \cdot a + \frac{b^N}{N} \cdot E[\ (\theta^{MAX})^{1-N}]$$

En el Anexo 2 se demuestra que $E[\ (\theta^{MAX})^{1-n}] = n \cdot a^{1-n}$. De esta forma, podemos reescribir la expresión anterior como la ecuación *(5.5)*.

$$G(n)_F = \frac{b^n}{a^n} \cdot (b + a) + \frac{n-1}{n+1} \cdot a \qquad (5.5)$$

La función de utilidad del trabajador sigue siendo las esperanza del salario máximo que puede recibir, $G(n)_F$, menos la desutilidad de buscar empleo, $\tau \cdot n$.

La expresión *(5.6)* será la función de utilidad del trabajador en este apartado.

$$U = \frac{b^n}{a^n} \cdot (\mathrm{b} + \mathrm{a}) + \frac{n-1}{n+1} \cdot \mathrm{a} - \tau \cdot n \qquad (5.6)$$

Si el trabajador realiza una búsqueda de tipo *fixed sample size*, entonces su *n** será aquel que maximice la expresión *(5.6)*. De esta forma, la condición de primer orden es $UMG(n) = 0$, expresado en *(5.7)*:

$$\frac{b^n}{a^n} \cdot (b + a) \cdot ln(b/a) + \frac{2 \cdot a}{(n+1)^2} - \tau = 0 \qquad (5.7)$$

Podemos apreciar al estudiar la condición de segundo orden, que la función de utilidad es cóncava estricta para cualquier $0 \leq b \leq a$ y $\tau > 0$. Siendo el problema convexo para máximo.

Además, podemos descomponer la expresión *(5.7)* como:

$$UMG(n) = IMG(n) - CMG(n)$$

Donde $IMG(n)$ es el Ingreso Marginal de buscar y $CMG(n)$ es el Coste Marginal de buscar.

$$IMG(n) = \frac{b^n}{a^n} \cdot (b + a) \cdot ln(b/a) + \frac{2 \cdot a}{(n+1)^2}$$

$$CMG(n) = \tau$$

Desafortunadamente, en la expresión *(5.7)* no es posible despejar *n**.

Aún así, si podemos comprobar que tanto si $b = 0$ como si $b = a$, los dos valores extremos que puede tomar *b*, ocurrirá que:

$$UMG(n) = \frac{2 \cdot a}{(n+1)^2} - \tau = 0 \quad ; \qquad n^* = \sqrt{\frac{2 \cdot a}{\tau}} - 1$$

Pese a que ambas situaciones dan lugar al mismo *n** óptimo, tanto la utilidad como el beneficio serán distintos:

- <u>Si $b = 0$</u>: Un individuo con salario de reserva nulo, *individuo sin salario de reserva*, tendrá un $G(n)_F$ menor, puesto que no impone ninguna restricción a las pujas que recibe. Como consecuencia, la utilidad de este individuo y el beneficio en caso de ganar la subasta de la i-ésima empresa serán:

$$U = \frac{n*-1}{n*+1} \cdot a - \tau \cdot n* \qquad ; \qquad \pi_i = \frac{x_i}{n*}$$

- <u>*Si* $b = a$</u>*:* Por el contrario, si el trabajador tiene un salario de reserva excesivamente alto, *individuo con salario de reserva máximo*, entonces su $G(n)_F$ será mayor. De hecho, al tener su salario de reserva igual al límite superior de la distribución de salarios, puede que ninguna empresa consiga igualar su salario de reserva inicial. La utilidad de este individuo y el beneficio de la empresa i-ésima en caso de ganar la subasta serán:

$$U = 2 \cdot a + \frac{n*-1}{n*+1} \cdot a - \tau \cdot n* \quad ; \quad \pi_i = \frac{x_i}{n*} \cdot \left(1 - \frac{a^n}{{x_i}^n}\right)$$

Mientras que para cualquier situación intermedia en la que $0 < b < a$, ocurrirá que el logaritmo del primer sumando de la $UMG(n)$ tomará un valor negativo, provocando que el *IMG(n)* sea menor. Como *IMG(n)* es estrictamente decreciente en *n*, entonces el *n** que hace que $IMG(n) = CMG(n)$ será menor y como resultado el trabajador acabará visitando menos empresas que en los dos casos anteriores.

Al introducirse un salario de reserva, existe un *trade-off* entre aumentar la utilidad esperada del trabajador y reducir los beneficios de las empresas.

Podemos concluir este apartado comprobando que bajo la existencia de un salario de reserva, tal que $0 < b < a$, curiosamente el potencial trabajador buscará en un número menor de empresas. Las soluciones numéricas señalan que a medida que b aumente, la utilidad aumentará en perjuicio de reducir los beneficios de las empresas en caso de ganar la subasta.

6. Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos caracterizado los equilibrios compuestos por las decisiones de las empresas y de un trabajador representativo que busca empleo.

El trabajador hemos supuesto que realiza una búsqueda de tipo *fixed sample size*, en contraposición a *sequential sampling*. Aunque la literatura de los costes de búsqueda no parece encontrar cual de las dos técnicas de búsqueda es más apropiada. Lo cierto es que utilizar *fixed sample size* parece limitarse solo a determinados escenarios, como puede ser la búsqueda de empleo en portales de *online*. Este trabajo puede servir de punto de partida para futuros trabajos en los que se incorpore la búsqueda secuencial del trabajador.

En el caso de este modelo, la ausencia de incertidumbre en la utilidad del trabajador hace que la búsqueda de tipo secuencial carezca de sentido, puesto que el individuo dispone de información perfecta acerca de las empresas así como de la distribución de los salarios, por lo que el n^* estará determinado desde el principio. Por ello, si se quiere replicar este modelo con búsqueda secuencial, conviene o bien modificar la función de utilidad o bien eliminar el supuesto de información perfecta puede. Si se opta por esta segunda opción, sería interesante que el trabajador desconozca el verdadero valor de a y que lo estime mediante su propia experiencia buscando.

Otro aspecto que se ha pasado por alto y en el que puede ser interesante profundizar más, es el de la aversión al riesgo de la búsqueda de empleo. La utilidad del trabajador representativo de este modelo solo tiene en cuenta la esperanza del salario máximo de los n encontrados. Sin embargo, el trabajador no valora ni para bien ni para mal el riesgo de encontrar salarios muy bajos dentro de su muestra analizada.

7. Anexo 1: Puja del equilibrio simétrico en subastas de primer precio

Sea una subasta de primer precio en sobre cerrado. Los beneficios del i-ésimo pujador son:

$$\pi_{\mathrm{i}} = \begin{cases} x_i - b_i & \text{si } b_i > max_{j \neq i}\, b_j \\ 0 & \text{si } b_i < max_{j \neq i}\, b_j \end{cases}$$

Donde x_i es la disponibilidad máxima a pagar y b_i su puja.

Consideramos $\beta_i : [0, a] \to \mathbb{R}^+$ la función que determina la puja. Tal que $\beta(0) = 0$, $\beta(x_i) = b_i$ y $\beta(0) < b_i \leq \beta(a)$.

El beneficio esperado del i-ésimo pujador será: $G(\beta^{-1}(b_i)) \cdot (x_i - b_i)$. Donde $\mathrm{G}(x_i)$ es la distribución de la puja más alta de las N-1 empresas restantes. El problema de las empresas será:

$$\operatorname*{Max}_{b_i} F = G(\beta^{-1}(b_i)) \cdot (x_i - b_i)$$

La correspondiente CPO:

$$\frac{dF}{d\,b} = \frac{dG}{d\,\beta^{-1}} \cdot \left(\frac{d\,\beta}{d\,b}\right)^{-1} \cdot (x_i - b_i) - 1 \cdot G(\beta^{-1}(b_i)) = 0$$

$$g(x_i) \cdot \frac{1}{\beta'(x_i)} \cdot (x_i - b_i) = G(x_i)$$

$$g(x_i) \cdot x_i = G(x_i) \cdot \beta'(x_i) + \beta(x_i) \cdot g(x_i)$$

$$g(x_i) \cdot x_i = \frac{d}{d\,x_i}[G(x_i) \cdot \beta(x_i)]$$

$$\int_0^{x_i} g(y) \cdot y\, dy = G(x_i) \cdot \beta(x_i)$$

$$\beta(x_i) = \frac{1}{G(x_i)} \cdot \int_0^{x_i} g(y) \cdot y\, dy$$

Este resultado es solo una condición necesaria, no la puja de equilibrio.

Integrando por partes, tenemos:

$$\int_0^{x_i} g(y) \cdot y\, dy = x_i \cdot G(x_i) - \int_0^{x_i} G(y)\, dy$$

Sustituyendo en el resultado de la CPO, queda la puja de equilibrio simétrica en la subasta de primer precio:

$$\beta(x_i) = \frac{1}{G(x_i)} \cdot \left[\, x_i \cdot G(x_i) - \int_0^{x_i} G(y)\, dy \,\right]$$

$$= x_i - \int_0^{x_i} \frac{G(y)}{G(x_i)}\, dy$$

8. Anexo 2: Cálculo de la esperanza del estadístico de mayor orden de una uniforme elevado a -δ

Sea el conjunto $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ con $\theta_i \sim iid[0, a]$. Queremos conocer $E\left[\theta_{MAX}{}^{-\delta}\right]$.

Consideremos el conjunto $\Omega' = \{\theta_1{}^{-\delta}, \theta_2{}^{-\delta}, \dots \theta_n{}^{-\delta}\}$, siendo $\delta \geq 0$. Para i={1,2,…n}, tenemos:

$$\theta_{MAX} \geq \theta_i \;\rightarrow\; \theta_{MAX}{}^{\delta} \geq \theta_i{}^{\delta} \rightarrow\; \theta_{MAX}{}^{-\delta} \leq \theta_i{}^{-\delta}$$

De esta forma, $\theta_{MAX}{}^{-\delta}$ es el elemento mínimo de Ω'.

Sea $\theta \sim U[0, a]$, entonces la distribución de $\theta^{-\delta}$ tiene el soporte $[a^{-\delta}, \infty]$. Para un $z \in [a^{-\delta}, \infty]$:

$$Prob(\theta^{-\delta} \leq z) = Prob(\theta \geq z^{-1/\delta}) = 1 - \; Prob(\theta \leq z^{-1/\delta}) = 1 - \frac{z^{-1/\delta}}{a}$$

Por lo que la distribución de $\theta^{-\delta}$ es:

$$F_{\theta^{-\delta}} = \; Prob(\theta^{-\delta} \leq z) = \; 1 - \frac{z^{-1/\delta}}{a}$$

Para un $z \in [a^{-\delta}, \infty]$, la distribución de $\theta_{MAX}{}^{-\delta}$ es $\Phi(z) = Prob(\theta_{MAX}{}^{-\delta} \leq z)$.

Para el mismo conjunto de antes, $\Omega' = \{\theta_1{}^{-\delta}, \theta_2{}^{-\delta}, \dots \theta_n{}^{-\delta}\} = \{\theta_1{}', \theta_2{}', \dots, \theta_n{}'\}$, siendo $\theta_i{}^{-\delta} = \; \theta_1{}'$. Entonces la distribución de mínimo es $\Phi(z)$:

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= Prob(\theta_{MIN}{}' \leq z) = 1 - Prob(\theta_{MIN}{}' \geq z) = \\
&= 1 \; - \; [Prob(\theta_1{}' \geq z) \cdot Prob(\theta_2{}' \geq z) \cdot \dots \; Prob(\theta_n{}' \geq z)] = \\
&= 1 \; - \; [Prob(\theta_i{}' \geq z)]^n = \\
&= 1 \; - \; [1 - \; Prob(\theta_i{}' \leq z)]^n \\
&= 1 \; - \; \left[1 - \; F_{\theta^{-\delta}}\right]^n
\end{aligned}$$

Quedando:

$$\Phi(z) = Prob(\theta_{MIN}{}' \leq z) = Prob(\theta_{MAX}{}^{-\delta} \leq z) = 1 - \frac{z^{-n/\delta}}{a^n}$$

Su correspondiente función de densidad:

$$\varphi(z) = \frac{n}{\delta \cdot a^n} \cdot z^{(-n/\delta) \, - \, 1}$$

Y la correspondiente esperanza:

$$E\left[\theta_{MAX}{}^{-\delta}\right] = \int_{a^{-\delta}}^{\infty} \varphi(z) \cdot z \, dz =$$

$$= \int_{a^{-\delta}}^{\infty} \frac{n}{\delta \cdot a^n} \cdot z^{-n/\delta} \, dz =$$

$$= \frac{n}{\delta \cdot a^n} \cdot \int_{a^{-\delta}}^{\infty} z^{-n/\delta} \, dz =$$

$$= \frac{n}{\delta \cdot a^n} \cdot \frac{1}{1-(n/\delta)} \cdot \left[z^{1-(n/\delta)}\right]_{a^{-\delta}}^{\infty} =$$

$$= \frac{n}{\delta \cdot a^n} \cdot \frac{1}{1-(n/\delta)} \cdot \left[\infty^{1-(n/\delta)} - a^{-\delta+n}\right] =$$

$$= \frac{n}{\delta \cdot a^n} \cdot \frac{a^{-\delta+n}}{(n/\delta)-1} =$$

$$= \frac{n}{n-\delta} \cdot a^{-\delta}$$

Siempre y cuando se cumpla que $1-(n/\delta) \leq 0$. En caso contrario, la esperanza no estará definida.

En el apartado 5, era necesario conocer la expresión de $E\left[\left(\theta^{MAX}\right)^{1-n}\right]$. En este caso, $\delta = n-1$. De esta forma:

$$E\left[\left(\theta^{MAX}\right)^{1-n}\right] = \frac{n}{n-n+1} \cdot a^{-n+1} = n \cdot a^{1-n}$$

Además se cumple la condición para que la esperanza sea finita: $1-\frac{n}{n-1} \leq 0$.

9. Referencias

Álvarez, F., Rey, J.M., 2019. (Quasi) uniqueness and restoring dynamics of price-dispersion market equilibria under search costs. Journal of Mathematical Economics, 81.

Krishna, V., 2010. Auction Theory, second edition. Chapters 1 and 2.

Stahl, D.O., 1989. Oligopolistic Pricing with Sequential Consumer Search. The American Economic Review, 79.

Honka, E., Chintagunta, P., 2017. Simultaneous or Sequential? Search strategies in the U.S. auto insurance industry. Marketing Science, 36.